Econometría

Quinta edición

Damodar N. Gujarati

Profesor emérito de Economía
United States Military Academy, West Point

Dawn C. Porter

University of Southern California

Revisión técnica:

Aurora Monroy Alarcón

Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

José Héctor Cortés Fregoso

Centro Universitario de Ciencias Económico-Administrativas (CUCEA)
Universidad de Guadalajara

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

AVISO LEGAL: ESTA INFORMACIÓN PUEDE SER UTILIZADA PARA FINES EDUCATIVOS EXCLUSIVAMENTE.

Capítulo 19

El problema de la identificación

En este capítulo se considera la naturaleza y el significado del problema de la identificación, cuya esencia es la siguiente: recuerde el modelo de demanda y oferta presentado en la sección 18.2. Suponga que se tiene información de series de tiempo sobre Q y P solamente y que no hay datos adicionales (tales como el ingreso del consumidor, el precio prevaleciente en el periodo anterior y las condiciones del clima). El problema de la identificación consiste en buscar una respuesta a la siguiente pregunta: dada solamente la información sobre P y Q, ¿cómo se sabe si se está estimando la función de demanda o la función de oferta? O, dicho de otra manera, si se piensa que se está ajustando una función de demanda, ¿cómo se garantiza que, en realidad, se está estimando dicha función y no otra?

Un momento de reflexión revelará que es necesario responder a la pregunta anterior antes de proceder a estimar los parámetros de la función de demanda. Para resolver el problema de la identificación, primero se introducen algunas notaciones y definiciones, y luego se ilustra dicho problema con diversos ejemplos. En seguida se establecen las reglas que pueden utilizarse para averiguar si una ecuación en un modelo de ecuaciones simultáneas está identificada, es decir, si en realidad se trata de la relación que se está estimando, bien sea la función de demanda, de oferta u otra cualquiera.

USO DIDACTICO

19.1 Notación y definiciones

Para facilitar la exposición, se introducen las siguientes notaciones y definiciones.

El modelo general de M ecuaciones con M variables endógenas o conjuntamente dependientes puede escribirse como la ecuación (19.1.1):

$$
\begin{aligned}
Y_{1t} &= \beta_{12}Y_{2t} + \beta_{13}Y_{3t} + \cdots + \beta_{1M}Y_{Mt} \\
&\qquad + \gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{12}X_{2t} + \cdots + \gamma_{1K}X_{Kt} + u_{1t} \\
Y_{2t} &= \beta_{21}Y_{1t} + \beta_{23}Y_{3t} + \cdots + \beta_{2M}Y_{Mt} \\
&\qquad + \gamma_{21}X_{1t} + \gamma_{22}X_{2t} + \cdots + \gamma_{2K}X_{Kt} + u_{2t} \\
Y_{3t} &= \beta_{31}Y_{1t} + \beta_{32}Y_{2t} + \cdots + \beta_{3M}Y_{Mt} \\
&\qquad + \gamma_{31}X_{1t} + \gamma_{32}X_{2t} + \cdots + \gamma_{3K}X_{Kt} + u_{3t} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_{MT} &= \beta_{M1}Y_{1t} + \beta_{M2}Y_{2t} + \cdots + \beta_{M,M-1}Y_{M-1,t} \\
&\qquad + \gamma_{M1}X_{1t} + \gamma_{M2}X_{2t} + \cdots + \gamma_{MK}X_{Kt} + u_{Mt}
\end{aligned}
\tag{19.1.1}
$$

donde $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M = M$ variables endógenas o conjuntamente dependientes
$X_1, X_2, \ldots, X_K = K$ variables predeterminadas (una de estas variables X puede tomar un valor unitario para dar cabida al término del intercepto en cada ecuación)
$u_1, u_2, \ldots, u_M = M$ perturbaciones estocásticas
$t = 1, 2, \ldots, T =$ número total de observaciones
$\beta =$ coeficientes de las variables endógenas
$\gamma =$ coeficientes de las variables predeterminadas

Como se puede observar, no es preciso que todas y cada una de las variables aparezcan en cada ecuación. En efecto, como se muestra en la sección 19.2, para que una ecuación esté identificada no es indispensable que la totalidad de las variables aparezca en cada ecuación.

En la ecuación (19.1.1) se observa que las variables que forman parte del modelo de ecuaciones simultáneas son de dos tipos: **endógenas**, es decir, aquellas determinadas (cuyos valores están) dentro del modelo; y **predeterminadas**, es decir, aquellas determinadas (cuyos valores están) fuera del modelo. Las variables endógenas se consideran estocásticas, en tanto que las predeterminadas se consideran como no estocásticas.

Las variables predeterminadas están divididas en dos categorías: **exógenas**, tanto actuales como rezagadas, y **endógenas rezagadas**. Así, X_{1t} *es una variable exógena actual (del tiempo presente), mientras que* $X_{1(t-1)}$ es una variable exógena rezagada, con un rezago de un intervalo de tiempo. $Y_{(t-1)}$ es una variable endógena rezagada con rezago de un intervalo de tiempo, pero, puesto que el valor de $Y_{1(t-1)}$ es conocido en el periodo actual t, ésta es considerada como no estocástica y, por tanto, es una variable predeterminada.[1] En resumen, las variables exógenas actuales y rezagadas y las endógenas rezagadas se consideran predeterminadas; sus valores no están determinados por el modelo en el periodo de tiempo actual.

Corresponde al diseñador del modelo especificar cuáles variables son endógenas y cuáles son predeterminadas. Aunque las variables (no económicas), tales como la temperatura y la lluvia, son claramente exógenas o predeterminadas, el diseñador de modelos debe tener gran precaución al clasificar las variables económicas como endógenas o predeterminadas, debiendo defender la clasificación con argumentos teóricos *a priori*. No obstante, más adelante en el capítulo se proporciona una prueba estadística de exogeneidad.

Las ecuaciones que aparecen en (19.1.1) se conocen como ecuaciones **estructurales** o **de comportamiento**, porque muestran la estructura (de un modelo económico) de una economía o del comportamiento de un agente económico (por ejemplo, un consumidor o un productor). Las β y las γ se conocen como **parámetros** o **coeficientes estructurales**.

A partir de las ecuaciones estructurales se pueden resolver para las M variables endógenas, derivar **las ecuaciones en forma reducida** y los correspondientes **coeficientes en forma reducida**. **Una ecuación en forma reducida es aquella que expresa únicamente una variable endógena en términos de las variables predeterminadas y las perturbaciones estocásticas**. A modo de ilustración, puede considerarse el modelo keynesiano de determinación del ingreso presentado en el capítulo 18:

$$\textit{Función de consumo}: \quad C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t \qquad 0 < \beta_1 < 1 \qquad (18.2.3)$$

$$\textit{Identidad del ingreso}: \quad Y_t = C_t + I_t \qquad (18.2.4)$$

En este modelo, C (consumo) y Y (ingreso) son las variables endógenas e I (gasto de inversión) es considerada como una variable exógena. Ambas ecuaciones son estructurales, siendo la ecuación (18.2.4) una identidad. Como es usual, se supone que la PMC β_1 se encuentra entre 0 y 1.

Si la ecuación (18.2.3) es sustituida en la ecuación (18.2.4), mediante un reordenamiento algebraico simple se obtiene:

$$Y_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + w_t \qquad (19.1.2)$$

[1] Se supone implícitamente aquí que las perturbaciones estocásticas, las u, no están serialmente correlacionadas. De no ser así, Y_{t-1} estaría correlacionada con el término de perturbación del periodo actual u_t y, por tanto, no se podría tratar como predeterminada.

USO DIDÁCTICO

en donde

$$\Pi_0 = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}$$
$$\Pi_1 = \frac{1}{1-\beta_1} \qquad (19.1.3)$$
$$w_t = \frac{u_t}{1-\beta_1}$$

La ecuación (19.1.2) es una **ecuación en forma reducida**; expresa la variable endógena Y solamente como función de la variable exógena I (o predeterminada) y del término de perturbación estocástica u. Π_0 y Π_1 son los correspondientes **coeficientes en forma reducida**. Observe que estos coeficientes son combinaciones no lineales del (los) coeficiente(s) estructural(es).

Al sustituir el valor de Y de la ecuación (19.1.2) en C de la ecuación (18.2.3), se obtiene otra ecuación en forma reducida:

$$C_t = \Pi_2 + \Pi_3 I_t + w_t \qquad (19.1.4)$$

en donde

$$\Pi_2 = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} \qquad \Pi_3 = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}$$
$$w_t = \frac{u_t}{1-\beta_1} \qquad (19.1.5)$$

Los coeficientes en la forma reducida, tales como Π_1 y Π_3, también se conocen como **multiplicadores de impacto** o **de corto plazo**, porque miden el impacto inmediato sobre la variable endógena de un cambio unitario del valor de la variable exógena.[2] Si en el modelo keynesiano anterior se incrementa el gasto de inversión en 1 dólar, por ejemplo, y se supone que la PMC es de 0.8, entonces de la ecuación (19.1.3), se obtiene $\Pi_1 = 5$. Este resultado significa que el incremento de 1 dólar en la inversión (en el tiempo actual) producirá inmediatamente un incremento en el ingreso de 5 dólares, o sea, un aumento cinco veces mayor. En forma similar, bajo las condiciones supuestas, la ecuación (19.1.5) muestra que $\Pi_3 = 4$, lo cual significa que un incremento de 1 dólar en el gasto de inversión conllevará de inmediato a un incremento de 4 dólares en el gasto de consumo.

En el contexto de los modelos econométricos, ecuaciones tales como la (18.2.4) o $Q_t^d = Q_t^s$ (la cantidad demandada igual a la cantidad ofrecida) se conocen como *condiciones de equilibrio*. La identidad (18.2.4) establece que el ingreso agregado Y debe ser igual al consumo agregado (es decir, gastos de consumo más gastos de inversión). Cuando se alcanza este equilibrio, las variables endógenas asumen sus valores de equilibrio.[3]

Observe una característica interesante de las ecuaciones en forma reducida. Puesto que solamente las variables predeterminadas y las perturbaciones estocásticas aparecen al lado derecho de estas ecuaciones, y puesto que se ha presumido que las variables predeterminadas no están correlacionadas con los términos de perturbación, el método de MCO puede aplicarse para estimar los coeficientes de las ecuaciones en forma reducida (las Π). A partir de éstos se pueden estimar los coeficientes estructurales (las β), como se muestra más adelante. Este procedimiento se conoce como **mínimos cuadrados indirectos** (MCI), y los coeficientes estructurales estimados se denominan estimaciones por MCI.

[2] En los modelos econométricos, las variables exógenas desempeñan un papel crucial. Con mucha frecuencia, esas variables están bajo el control directo del gobierno. Algunos ejemplos son la tasa de impuestos personales y empresariales, los subsidios y los seguros de desempleo, etcétera.

[3] Para mayores detalles, véase Jan Kmenta, Elements of Econometrics, 2a. ed., Macmillan, Nueva York, 1986, pp. 723-731.

USO DIDÁCTICO

En el capítulo 20 se estudiará el método de MCI con mayor detalle. Mientras tanto, observe que puesto que los coeficientes en la forma reducida pueden estimarse mediante el método de MCO, y puesto que dichos coeficientes son combinaciones de los coeficientes estructurales, existe la posibilidad de que estos últimos puedan ser "recuperados" a partir de los coeficientes en la forma reducida, y es en la estimación de los parámetros estructurales donde se puede estar finalmente interesado. ¿Cómo se recuperan los coeficientes estructurales a partir de los coeficientes en la forma reducida? La respuesta se da en la sección 19.2 y contiene la esencia del problema de identificación.

19.2 Problema de identificación

El **problema de identificación** pretende establecer si las estimaciones numéricas de los parámetros de una ecuación estructural pueden obtenerse de los coeficientes en forma reducida estimados. Si puede hacerse, se dice que la ecuación particular está *identificada*; si no, se dice entonces que la ecuación bajo consideración está *no identificada* o *subidentificada*.

Una ecuación identificada puede estar *exactamente* (o total o precisamente) *identificada* o *sobreidentificada*. Se dice que está exactamente identificada si pueden obtenerse valores numéricos únicos de los parámetros estructurales. Se dice que está sobreidentificada si puede obtenerse más de un valor numérico para algunos de los parámetros de las ecuaciones estructurales. Las circunstancias bajo las cuales puede ocurrir cada uno de los casos anteriores se indicarán en seguida.

El problema de identificación surge porque diferentes conjuntos de coeficientes estructurales pueden ser compatibles con el mismo conjunto de información. En otras palabras, una ecuación en una forma reducida dada puede ser compatible con diferentes ecuaciones estructurales o con diferentes hipótesis (modelos), y puede ser difícil decir cuál hipótesis (modelo) particular se está investigando. En lo que resta de la sección se consideran diversos ejemplos para mostrar la naturaleza del problema de identificación.

USO DIDÁCTICO

Subidentificación

Considere de nuevo el modelo de demanda y oferta (18.2.1) y (18.2.2), conjuntamente con la condición de mercado nivelado, o de equilibrio, según la cual la demanda es igual a la oferta. Mediante la condición de equilibrio se obtiene:

$$\alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t} = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t} \tag{19.2.1}$$

Al resolver la ecuación (19.2.1) se obtiene el precio de equilibrio

$$P_t = \Pi_0 + v_t \tag{19.2.2}$$

en donde

$$\Pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{19.2.3}$$

$$v_t = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{19.2.4}$$

Al sustituir P_t de la ecuación (19.2.2) en la ecuación (18.2.1) o (18.2.2), se obtiene la siguiente cantidad de equilibrio:

$$Q_t = \Pi_1 + w_t \tag{19.2.5}$$

en donde

$$\Pi_1 = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{19.2.6}$$

$$w_t = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{19.2.7}$$

A propósito, es necesario observar que los términos de error v_t y w_t son combinaciones lineales de los términos de error originales u_1 y u_2.

Las ecuaciones (19.2.2) y (19.2.5) son ecuaciones en forma reducida. Ahora bien, el modelo de demanda y oferta contiene cuatro coeficientes estructurales α_0, α_1, β_0 y β_1, pero no hay una forma única de estimarlos. ¿Por qué? La respuesta se encuentra en los dos coeficientes en la forma reducida dados en las ecuaciones (19.2.3) y (19.2.6). Estos coeficientes contienen los cuatro parámetros estructurales, pero no hay forma de estimar las cuatro incógnitas estructurales a partir únicamente de dos coeficientes en forma reducida. En el álgebra de secundaria se decía que para estimar cuatro incógnitas se deben tener cuatro ecuaciones (independientes) y, en general, para estimar k incógnitas se deben tener k ecuaciones (independientes). A propósito, si se efectúa la regresión en forma reducida (19.2.2) y (19.2.5) se verá que no hay variables explicativas, sólo las constantes, y éstas simplemente darán los valores promedio de P y Q (¿por qué?).

Todo esto significa que, dada la información de series de tiempo sobre P (precio) y Q (cantidad) y ninguna información adicional, no hay forma de que el investigador pueda garantizar si está estimando la función de demanda o la función de oferta. Es decir, unos P_t y Q_t dados representan simplemente el punto de intersección de las curvas apropiadas de demanda y oferta en razón de la condición de equilibrio de que la demanda sea igual a la oferta. Para ver esto con claridad, considere el diagrama de dispersión que aparece en la figura 19.1.

La figura 19.1*a*) muestra algunos puntos dispersos que relacionan Q con P. Cada punto disperso representa la intersección de una curva de demanda y de oferta, como se muestra en la figura 19.1*b*). Ahora considere un punto aislado como el que se muestra en la figura 19.1*c*). No hay forma de asegurar cuál de las curvas de demanda y oferta, entre toda la familia de curvas que aparece en ese panel, generó ese punto. Es claro que se requiere información adicional sobre la naturaleza de dichas curvas. Por ejemplo, si la curva de demanda se desplaza en el tiempo debido

USO DIDÁCTICO

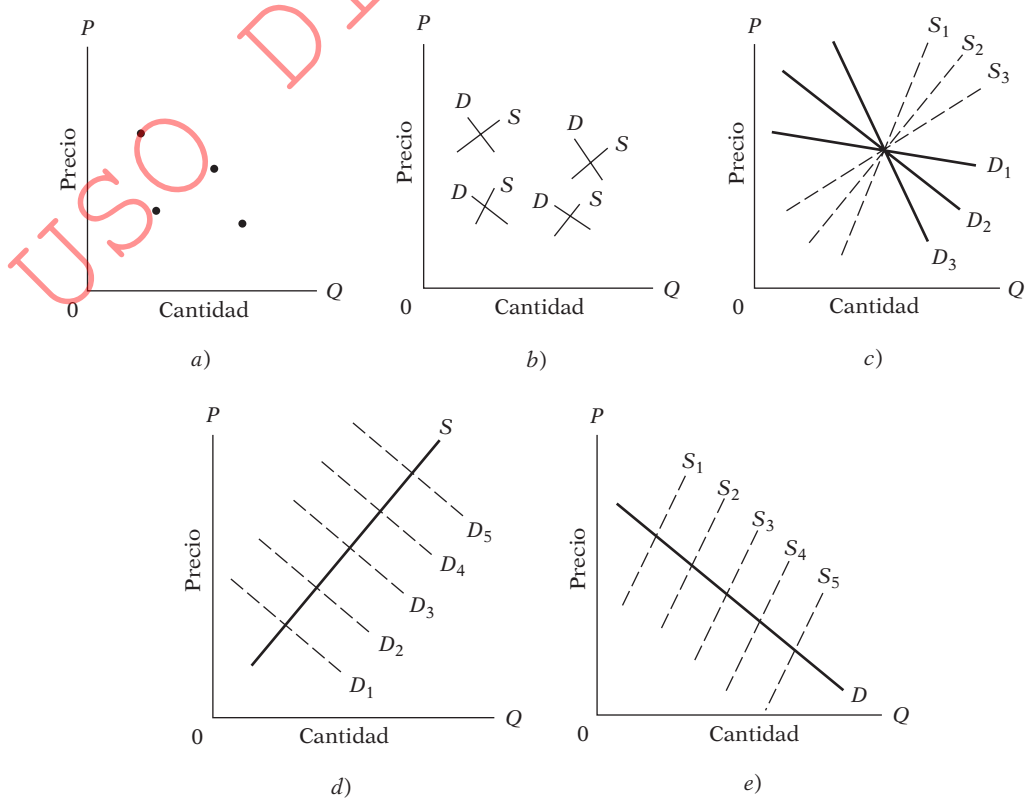

FIGURA 19.1
Funciones hipotéticas de oferta y demanda y el problema de la identificación.

a cambios en el ingreso, en los gustos, etc., pero la de oferta permanece relativamente estable ante esos cambios, como se ilustra en la figura 19.1*d*), los puntos dispersos indican una curva de oferta. En esta situación, se dice que se ha identificado la curva de oferta. Mediante el mismo procedimiento, si la curva de oferta se desplaza en el tiempo debido a cambios en las condiciones climáticas (en el caso de bienes agrícolas) o debido a otros factores externos, pero la de demanda permanece relativamente estable, como se ilustra en la figura 19.1*e*), los puntos dispersos indican una curva de demanda. En este caso, se dice que la curva de demanda se ha identificado.

Hay una forma alterna y posiblemente más ilustrativa de considerar el problema de la identificación. Suponga que se multiplica la ecuación (18.2.1) por $\lambda(0 \leq \lambda \leq 1)$ y la ecuación (18.2.2) por $1 - \lambda$ para obtener las siguientes ecuaciones (*nota:* se eliminan aquí los superíndices de Q):

$$\lambda Q_t = \lambda\alpha_0 + \lambda\alpha_1 P_t + \lambda u_{1t} \tag{19.2.8}$$

$$(1-\lambda)Q_t = (1-\lambda)\beta_0 + (1-\lambda)\beta_1 P_t + (1-\lambda)u_{2t} \tag{19.2.9}$$

Al sumar estas dos ecuaciones, se obtiene la siguiente combinación lineal de las ecuaciones originales de demanda y oferta:

$$Q_t = \gamma_0 + \gamma_1 P_t + w_t \tag{19.2.10}$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \lambda\alpha_0 + (1-\lambda)\beta_0 \\ \gamma_1 &= \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_1 \\ w_t &= \lambda u_{1t} + (1-\lambda)u_{2t} \end{aligned} \tag{19.2.11}$$

La ecuación (19.2.10) "falsa" o "híbrida", a partir de la observación, no es distinguible de la ecuación (18.2.1) ni de la (18.2.2), porque éstas consideran las regresiones de Q y de P. Por consiguiente, si se tiene información de series de tiempo sobre P y Q solamente, cualquiera de las ecuaciones (18.2.1), (18.2.2) o (19.2.10) puede ser compatible con la misma información. En otras palabras, la misma información puede ser compatible con la "hipótesis" de las ecuaciones (18.2.1), (18.2.2) o (19.2.10), y no hay forma de decir cuál de éstas se está verificando.

Para que una ecuación esté identificada, es decir, para que sus parámetros sean estimados, debe mostrarse que el conjunto dado de información no producirá una ecuación estructural que sea similar en apariencia a la ecuación en la cual se está interesado. Si se pretende estimar la función de demanda, se debe demostrar que la información dada no es consistente con la función de oferta ni con otro tipo de ecuación híbrida.

USO DIDÁCTICO

Identificación precisa o exacta

La razón por la cual no fue posible identificar las anteriores funciones de demanda o de oferta fue porque las mismas variables P y Q están presentes en ambas funciones y no se dispone de información adicional, como la indicada en las figuras 19.1*d* o *e*. Pero suponga que se considera el siguiente modelo de demanda y oferta:

Función de demanda: $Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t} \qquad \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$ **(19.2.12)**

Función de oferta: $Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t} \qquad \beta_1 > 0$ **(19.2.13)**

donde I = ingreso del consumidor, una variable exógena, y todas las demás variables como se definieron anteriormente.

Observe que la única diferencia entre el modelo anterior y el modelo original de demanda y oferta es que hay una variable adicional en la función de demanda, a saber, el ingreso. De la teoría económica de la demanda se sabe que el ingreso es, por lo general, un determinante importante de la demanda de la mayoría de bienes y servicios. Por consiguiente, su inclusión en la función de demanda proporcionará información adicional sobre el comportamiento del consumidor. Para la mayoría de los bienes se espera que el ingreso tenga un efecto positivo sobre el consumo ($\alpha_2 > 0$).

Al utilizar el mecanismo de nivelación del mercado, cantidad demandada = cantidad ofrecida, se tiene:

$$\alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t} = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t} \tag{19.2.14}$$

Al resolver la ecuación (19.2.14), se obtiene el siguiente valor de equilibrio de P_t:

$$P_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + v_t \tag{19.2.15}$$

en donde los coeficientes en la forma reducida son

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} \\ \Pi_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} \end{aligned} \tag{19.2.16}$$

y

$$v_t = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

Al sustituir el valor de equilibrio de P_t en la función de demanda u oferta anterior, se obtiene la siguiente cantidad de equilibrio:

$$Q_t = \Pi_2 + \Pi_3 I_t + w_t \tag{19.2.17}$$

en donde

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \\ \Pi_3 &= -\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \end{aligned} \tag{19.2.18}$$

y

$$w_t = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

Puesto que las ecuaciones (19.2.15) y (19.2.17) son ecuaciones en forma reducida, puede aplicarse el método de MCO para estimar sus parámetros. Ahora bien, el modelo de demanda y oferta (19.2.12) y (19.2.13) contiene cinco coeficientes estructurales —α_0, α_1, α_2, β_0, y β_1—, pero sólo se dispone de cuatro ecuaciones para estimarlos, a saber, los cuatro coeficientes en forma reducida Π_0, Π_1, Π_2 y Π_3, dados en las ecuaciones (19.2.16) y (19.2.18). Por tanto, no es posible encontrar una solución única para todos los coeficientes estructurales. Sin embargo, puede mostrarse con facilidad que los parámetros de la función de oferta pueden ser identificados (estimados) porque

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \Pi_2 - \beta_1 \Pi_0 \\ \beta_1 &= \frac{\Pi_3}{\Pi_1} \end{aligned} \tag{19.2.19}$$

Pero no hay una forma única de estimar los parámetros de la función de demanda; por consiguiente, ésta permanece subidentificada. A propósito, observe que el coeficiente estructural β_1 es una función no lineal de los coeficientes en forma reducida, lo cual crea algunos problemas cuando se trata de estimar el error estándar del β_1 estimado, como se verá en el capítulo 20.

Para verificar que la función de demanda (19.2.12) no puede ser identificada (estimada), multiplique ésta por λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) y la (19.2.13) por $1 - \lambda$, y luego sume para obtener la siguiente ecuación "híbrida":

$$Q_t = \gamma_0 + \gamma_1 P_t + \gamma_2 I_t + w_t \tag{19.2.20}$$

USO DIDÁCTICO

en donde

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \lambda\alpha_0 + (1-\lambda)\beta_0 \\ \gamma_1 &= \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_1 \\ \gamma_2 &= \lambda\alpha_2 \end{aligned} \tag{19.2.21}$$

y

$$w_t = \lambda u_{1t} + (1-\lambda)u_{2t}$$

La ecuación (19.2.20) es, a partir de la observación, indistinguible de la función de demanda (19.2.12), aunque sí es distinguible de la función de oferta (19.2.13), que no contiene la variable I como una variable explicativa. Por tanto, la función de demanda permanece sin identificar.

Observe un hecho interesante: ¡es la presencia de una variable adicional en la función de demanda la que permite identificar la función de oferta! ¿Por qué? La inclusión de la variable ingreso en la ecuación de demanda proporciona alguna información adicional sobre la variabilidad de la función, como lo indica la figura 19.1*d*). La figura muestra cómo la intersección de la curva estable de oferta con la curva de demanda en movimiento (debido a cambios en el ingreso) permite trazar (identificar) la curva de oferta. Como se mostrará en breve, con mucha frecuencia la posibilidad de identificar una ecuación depende de si excluye una o más variables que están incluidas en otras ecuaciones del modelo.

Pero suponga que se considera el siguiente modelo de demanda y oferta:

Función de demanda: $$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t} \qquad \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0 \tag{19.2.12}$$

Función de oferta: $$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t} \qquad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0 \tag{19.2.22}$$

donde la función de demanda permanece igual que antes pero la función de oferta incluye una variable explicativa adicional, el precio que está rezagado un periodo. La función de oferta postula que la cantidad de un bien ofrecido depende de su precio actual y del precio del periodo anterior, un modelo frecuentemente utilizado para explicar la oferta de muchos bienes agrícolas. Observe que P_{t-1} es una variable predeterminada porque su valor se conoce en el tiempo t.

Por el mecanismo de nivelación del mercado se tiene que

$$\alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t} = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t} \tag{19.2.23}$$

Al resolver esta ecuación se obtiene el siguiente precio de equilibrio:

$$P_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + \Pi_2 P_{t-1} + v_t \tag{19.2.24}$$

en donde

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} \\ \Pi_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} \\ \Pi_2 &= \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} \\ v_t &= \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1} \end{aligned} \tag{19.2.25}$$

USO DIDÁCTICO

Al sustituir el precio de equilibrio en la ecuación de demanda o en la de oferta se obtiene la correspondiente cantidad de equilibrio:

$$Q_t = \Pi_3 + \Pi_4 I_t + \Pi_5 P_{t-1} + w_t \tag{19.2.26}$$

en donde los coeficientes en la forma reducida son

$$\Pi_3 = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$\Pi_4 = -\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{19.2.27}$$

$$\Pi_5 = \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$

y

$$w_t = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

El modelo de demanda y oferta dado en las ecuaciones (19.2.12) y (19.2.22) contiene seis coeficientes estructurales —α_0, α_1, α_2, β_0, β_1 y β_2—, y hay seis coeficientes en la forma reducida —Π_0, Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 y Π_5— para estimarlos. Así, se tienen seis ecuaciones con seis incógnitas y normalmente es posible obtener estimaciones únicas. Por consiguiente, tanto los parámetros de ambas ecuaciones, de demanda y de oferta, como el sistema en su totalidad pueden ser identificados. (En el ejercicio 19.2 se pide al lector expresar los seis coeficientes estructurales en términos de los seis coeficientes en su forma reducida dados anteriormente, para mostrar que la estimación única del modelo es posible.)

Para verificar que las funciones de demanda y oferta anteriores son identificables, se puede recurrir también al mecanismo de multiplicar la ecuación de demanda (19.2.12) por λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) y la función de oferta (19.2.22) por $1 - \lambda$ y luego sumarlas para obtener una ecuación híbrida. Dicha ecuación tendrá las variables predeterminadas I_t y P_{t-1}; por tanto, ésta será una ecuación por observación diferente tanto de la ecuación de demanda como también de la ecuación de oferta porque la primera no contiene a P_{t-1} y la última no contiene a I_t.

USO DIDÁCTICO

Sobreidentificación

Para ciertos bienes y servicios, el ingreso, al igual que la riqueza del consumidor, es un determinante importante de la demanda. Por consiguiente, al modificar la función de demanda (19.2.12) como se muestra a continuación, y manteniendo la función de oferta como antes, se obtiene:

Función de demanda: $$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + \alpha_3 R_t + u_{1t} \tag{19.2.28}$$

Función de oferta: $$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t} \tag{19.2.22}$$

en donde, adicionalmente a las variables ya definidas, R representa la riqueza; para la mayoría de los bienes y servicios se espera que la riqueza, al igual que el ingreso, tenga un efecto positivo sobre el consumo.

Al igualar la demanda a la oferta, se obtiene el siguiente precio y la siguiente cantidad de equilibrio:

$$P_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + \Pi_2 R_t + \Pi_3 P_{t-1} + v_t \tag{19.2.29}$$

$$Q_t = \Pi_4 + \Pi_5 I_t + \Pi_6 R_t + \Pi_7 P_{t-1} + w_t \tag{19.2.30}$$

en donde

$$\Pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \Pi_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$
$$\Pi_2 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \Pi_3 = \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$
$$\Pi_4 = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \Pi_5 = -\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{19.2.31}$$
$$\Pi_6 = -\frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \Pi_7 = \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$
$$w_t = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad v_t = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

El anterior modelo de demanda y oferta contiene siete coeficientes estructurales, pero hay ocho ecuaciones para estimarlos: los ocho coeficientes en forma reducida dados en (19.2.31); es decir, el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas. Como resultado, no es posible obtener una estimación única de todos los parámetros del modelo, lo cual puede demostrarse fácilmente. De los anteriores coeficientes en la forma reducida se puede obtener

$$\beta_1 = \frac{\Pi_6}{\Pi_2} \tag{19.2.32}$$

o

$$\beta_1 = \frac{\Pi_5}{\Pi_1} \tag{19.2.33}$$

es decir, hay dos estimaciones del coeficiente de precios en la función de oferta y no hay garantía de que estos dos valores o soluciones sean idénticos.[4] Además, puesto que β_1 aparece en los denominadores de todos los coeficientes en su forma reducida, la ambigüedad en la estimación de β_1 será transmitida también a las demás estimaciones.

¿Por qué fue posible identificar la función de oferta en el sistema (19.2.12) y (19.2.22) pero no en el sistema (19.2.28) y (19.2.22), siendo que en ambos casos la función de oferta permanece igual? La respuesta es porque se tiene **demasiada información** para identificar la curva de oferta. Esta situación es la opuesta al caso de subidentificación, donde hay muy poca información. El exceso de información resulta del hecho de que en los modelos (19.2.12) y (19.2.22), la exclusión de la variable ingreso de la función de oferta fue suficiente para identificarla, pero en los modelos (19.2.28) y (19.2.22) la función de oferta excluye no solamente la variable ingreso, sino también la variable riqueza. En otras palabras, en el último modelo se impusieron "muchas" restricciones sobre la función de oferta al requerir excluir más variables de las necesarias para identificarla; sin embargo, esta situación no implica que la sobreidentificación necesariamente sea mala. En el capítulo 20 se verá la forma de manejar el problema de tener mucha información o muchas restricciones.

Ya se han examinado exhaustivamente todos los casos. Como muestra la exposición anterior, una ecuación en un modelo de ecuaciones simultáneas puede estar subidentificada o identificada (ya sea sobreidentificada o exactamente identificada). El modelo como un todo está identificado si cada una de sus ecuaciones también lo está. Para asegurar la identificación, se acude a las ecuaciones en forma reducida. En la sección 19.3 se considera un método alterno y posiblemente menos laborioso para determinar si una ecuación en un modelo de ecuaciones simultáneas está identificada o no.

[4] Observe la diferencia entre la subidentificación y la sobreidentificación. En el primer caso es imposible obtener estimaciones de los parámetros estructurales, en tanto que en el segundo puede haber varias estimaciones de uno o más coeficientes estructurales.

USO DIDÁCTICO

19.3 Reglas para la identificación

Como lo indican los ejemplos en la sección 19.2, en principio es posible recurrir a las ecuaciones en forma reducida para determinar la identificación de una ecuación en un sistema de ecuaciones simultáneas. Pero los ejemplos también muestran que este proceso puede llegar a ser muy dispendioso y laborioso. Por fortuna, no es indispensable utilizar este procedimiento. Las llamadas **condiciones de orden y de rango de identificación** aligeran la labor, proporcionando una rutina sistemática.

Para entender las condiciones de orden y de rango, se introduce la siguiente notación:

M = número de variables endógenas en el modelo.
m = número de variables endógenas en una ecuación dada.
K = número de variables predeterminadas en el modelo, incluyendo el intercepto.
k = número de variables predeterminadas en una ecuación dada.

Condición de orden para la identificación[5]

Una condición necesaria (pero no suficiente) para la identificación, conocida como la **condición de orden**, puede expresarse en dos formas diferentes pero equivalentes, de la siguiente manera (las condiciones necesaria y suficiente para la identificación se presentan más adelante):

Definición 19.1

En un modelo de M ecuaciones simultáneas, para que una ecuación esté identificada debe excluir *al menos* $M - 1$ variables (endógenas y predeterminadas) que aparecen en el modelo. Si excluye exactamente $M - 1$ variables, la ecuación está exactamente identificada. Si excluye más de $M - 1$ variables, estará sobreidentificada.

Definición 19.2

En un modelo de M ecuaciones simultáneas, para que una ecuación esté identificada, el número de variables predeterminadas excluidas de esa ecuación no debe ser menor que el número de variables endógenas incluidas en la ecuación menos 1, es decir,

$$K - k \geq m - 1 \tag{19.3.1}$$

Si $K - k = m - 1$, la ecuación está exactamente identificada, pero si $K - k > m - 1$, estará sobreidentificada.

En el ejercicio 19.1 se pide al lector demostrar que las dos definiciones anteriores son equivalentes.

Para ilustrar la condición de orden, considere de nuevo los ejemplos anteriores.

EJEMPLO 19.1

Función de demanda: $Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}$ **(18.2.1)**

Función de oferta: $Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$ **(18.2.2)**

Este modelo tiene dos variables endógenas P y Q y no tiene variables predeterminadas. Para ser identificadas cada una de estas ecuaciones debe excluir por lo menos $M - 1 = 1$ variable. Puesto que éste no es el caso, ninguna ecuación está identificada.

EJEMPLO 19.2

Función de demanda: $Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t}$ **(19.2.12)**

Función de oferta: $Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$ **(19.2.13)**

En este modelo, Q y P son endógenas e I es exógena. Al aplicar la condición de orden dada en (19.3.1), se observa que la función de demanda no está identificada. Por otra parte, la función de oferta está exactamente identificada porque excluye de manera estricta $M - 1 = 1$ variable I_t.

[5] El término **orden** se refiere al orden de una matriz, es decir, el número de filas y de columnas que contiene. Véase el **apéndice B**.

USO DIDACTICO

EJEMPLO 19.3

Función de demanda: $Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t}$ **(19.2.12)**

Función de oferta: $Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t}$ **(19.2.22)**

Dado que P_t y Q_t son endógenas e I_t y P_{t-1} son predeterminadas, la ecuación (19.2.12) excluye exactamente una variable P_{t-1} y la ecuación (19.2.22) hace lo mismo con una variable I_t. Por tanto, cada ecuación está identificada según la condición de orden. Así, el modelo considerado como un todo también está identificado.

EJEMPLO 19.4

Función de demanda: $Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + \alpha_3 R_t + u_{1t}$ **(19.2.28)**

Función de oferta: $Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t}$ **(19.2.22)**

En este modelo P_t y Q_t son endógenas e I_t, R_t y P_{t-1} son predeterminadas. La función de demanda excluye exactamente una variable P_{t-1} y, por tanto, según la condición de orden, está exactamente identificada. Pero la función de oferta excluye dos variables I_t y R_t, y se dice entonces que está sobreidentificada. Como se mencionó, en este caso hay dos formas de estimar β_1, el coeficiente de la variable precio.

Aquí se observa una ligera complicación. Según la condición de orden, la función de demanda está identificada. Pero si se trata de estimar los parámetros de esta ecuación a partir de los coeficientes en forma reducida dados en (19.2.31), las estimaciones no serán únicas porque β_1, que forma parte de los cálculos, toma dos valores, y es preciso decidir cuál es el apropiado. Esta complicación puede obviarse porque, como se muestra en el capítulo 20, en casos de sobreidentificación el método de mínimos cuadrados indirectos no es apropiado y debe descartarse en favor de otros métodos. Uno de esos métodos es el de **mínimos cuadrados en dos etapas**, el cual se estudiará detalladamente en el capítulo 20.

USO DIDÁCTICO

Como lo indican los ejemplos anteriores, la identificación de una ecuación en un modelo de ecuaciones simultáneas es posible si dicha ecuación excluye una o más variables que están presentes en otras partes del modelo. Esta situación se conoce como *criterio de exclusión* (de variables), o *criterio de cero restricciones* (se supone que los coeficientes de las variables que no aparecen en una ecuación tienen valor de cero). Este criterio es el más utilizado para asegurar o determinar la identificación de una ecuación. Observe que el criterio de cero restricciones está basado en expectativas *a priori* o teóricas acerca de la ausencia de ciertas variables en una ecuación dada. Depende del investigador señalar claramente la razón por la cual espera que ciertas variables aparezcan en algunas ecuaciones y en otras no.

Condición de rango para la identificación[6]

La condición de orden analizada anteriormente es una condición necesaria pero no suficiente para la identificación; es decir, aun si se cumple, puede suceder que una ecuación no esté identificada. Así, en el ejemplo 19.2, la ecuación de oferta fue identificada por la condición de orden porque excluyó la variable ingreso I_t, la cual aparecía en la función de demanda. Pero la identificación se logra solamente si α_2, el coeficiente de I_t en la función de demanda, no es cero, es decir, si la variable ingreso en verdad forma parte de la función de demanda, no sólo en forma probable, sino real.

En términos más generales, aun si una ecuación cumple la condición de orden $K - k \geq m - 1$, puede no estar identificada porque las variables predeterminadas excluidas de esa ecuación, pero presentes en el modelo, quizá no todas sean independientes de manera que tal vez no exista una correspondencia uno a uno entre los coeficientes estructurales (las β) y los coeficientes en forma

[6] El término **rango** se refiere al rango de una matriz y está dado por la matriz cuadrada de máximo rango (contenida en la matriz dada) cuyo determinante sea diferente de cero. De manera alterna, el rango de una matriz es el número máximo de filas o de columnas linealmente independientes de dicha matriz. Véase el **apéndice B**.

reducida (las Π). O sea, probablemente no sea posible estimar los parámetros estructurales a partir de los coeficientes en la forma reducida, como se mostrará en breve. Por consiguiente, se requiere una condición que sea tanto necesaria como suficiente para la identificación. Ésta es la condición de rango para la identificación, la cual puede expresarse en los siguientes términos:

Condición de rango para la identificación	En un modelo que contiene M ecuaciones en M variables endógenas, una ecuación está identificada si y sólo si puede construirse *por lo menos* un determinante diferente de cero, de orden $(M-1)(M-1)$, a partir de los coeficientes de las variables (endógenas y predeterminadas) excluidas de esa ecuación particular, pero incluidas en las otras ecuaciones del modelo.

Como ilustración de la condición de rango para la identificación, considere el siguiente sistema hipotético de ecuaciones simultáneas, en el cual las variables Y son endógenas y las variables X son predeterminadas.[7]

$$Y_{1t} - \beta_{10} - \beta_{12}Y_{2t} - \beta_{13}Y_{3t} - \gamma_{11}X_{1t} = u_{1t} \tag{19.3.2}$$

$$Y_{2t} - \beta_{20} - \beta_{23}Y_{3t} - \gamma_{21}X_{1t} - \gamma_{22}X_{2t} = u_{2t} \tag{19.3.3}$$

$$Y_{3t} - \beta_{30} - \beta_{31}Y_{1t} - \gamma_{31}X_{1t} - \gamma_{32}X_{2t} = u_{3t} \tag{19.3.4}$$

$$Y_{4t} - \beta_{40} - \beta_{41}Y_{1t} - \beta_{42}Y_{2t} - \gamma_{43}X_{3t} = u_{4t} \tag{19.3.5}$$

Para facilitar la identificación, se escribe el sistema anterior en la tabla 19.1, que se explica por sí misma.

Primero se aplica la condición de orden para la identificación, como se muestra en la tabla 19.2. Cada ecuación está identificada por la condición de orden. Verifique esto con la condición de rango. Considere la primera ecuación, que excluye las variables Y_4, X_2 y X_3 (esta exclusión está representada por los ceros en el primer renglón de la tabla 19.1). Para que esta ecuación esté identificada, se debe obtener por lo menos un determinante diferente de cero de orden

TABLA 19.1

	Coeficientes de las variables							
Núm. de ecuación	**1**	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2	X_3
(19.3.2)	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
(19.3.3)	$-\beta_{20}$	0	1	$-\beta_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
(19.3.4)	$-\beta_{30}$	$-\beta_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
(19.3.5)	$-\beta_{40}$	$-\beta_{41}$	$-\beta_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

TABLA 19.2

Núm. de ecuación	Núm. de variables predeterminadas excluidas $(K-k)$	Núm. de variables endógenas incluidas menos uno, $(m-1)$	¿Identificadas?
(19.3.2)	2	2	Exactamente
(19.3.3)	1	1	Exactamente
(19.3.4)	1	1	Exactamente
(19.3.5)	2	2	Exactamente

[7] El sistema de ecuaciones simultáneas expuesto en las ecuaciones (19.1.1) puede presentarse en la siguiente forma alterna, que puede ser conveniente para el manejo matricial.

USO DIDÁCTICO

3×3, a partir de los coeficientes de las variables excluidas de esta ecuación, pero incluidas en otras. Para conseguir el determinante, se obtiene primero la matriz relevante de los coeficientes de las variables Y_4, X_2 y X_3 incluidas en las otras ecuaciones. En el presente caso, solamente hay una matriz como ésa, llamada **A**, definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{bmatrix} \tag{19.3.6}$$

Se puede ver que el determinante de esta matriz es cero:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{vmatrix} \tag{19.3.7}$$

Puesto que el determinante es cero, el rango de la matriz (19.3.6), denotado por $\rho(\mathbf{A})$, es menor que 3. Por consiguiente, la ecuación (19.3.2) no satisface la condición de rango y, por tanto, no está identificada.

Como se anotó, la condición de rango es tanto necesaria como suficiente para la identificación. Por consiguiente, a pesar de que la condición de orden muestra que la ecuación (19.3.2) está identificada, la condición de rango muestra que no lo está. Al parecer, las columnas o los renglones de la matriz **A** dadas en (19.3.6) no son (linealmente) independientes, lo que significa que hay alguna relación entre las variables Y_4, X_2 y X_3. Como resultado, puede no haber suficiente información para estimar los parámetros de la ecuación (19.3.2); para el modelo anterior, las ecuaciones en forma reducida mostrarán que no es posible obtener los coeficientes estructurales de esa ecuación a partir de los coeficientes en la forma reducida. El lector debe verificar que, mediante la condición de rango, las ecuaciones (19.3.3) y (19.3.4) tampoco están identificadas, mientras que la ecuación (19.3.5) sí lo está.

Como lo muestra el análisis anterior, *la condición de rango dice si la ecuación bajo consideración está identificada o no, en tanto que la condición de orden expresa si dicha ecuación está exactamente identificada o sobreidentificada*.

Para aplicar la condición de rango, puede procederse de la siguiente manera:

1. Escriba el sistema en forma tabular, como aparece en la tabla 19.1.
2. Elimine los coeficientes del renglón en el cual aparece la ecuación bajo consideración.
3. Elimine también las columnas que corresponden a aquellos coeficientes del punto 2 que son diferentes de cero.
4. Los datos que quedan en la tabla corresponden únicamente a los coeficientes de las variables incluidas en el sistema pero no en la ecuación bajo consideración. Con estos datos, forme todas las matrices posibles, en este caso **A**, de orden $M - 1$ y obtenga los determinantes correspondientes. Si es posible encontrar al menos un determinante diferente de cero, la ecuación en cuestión estará identificada (en forma exacta o sobreidentificada). El rango de la matriz, por ejemplo **A**, en este caso, es exactamente igual a $M - 1$. Si todos los determinantes posibles $(M - 1)(M - 1)$ son cero, el rango de la matriz **A** es menor que $M - 1$ y la ecuación bajo investigación no está identificada.

El estudio de las condiciones de orden y de rango para la identificación conduce a los siguientes principios generales de identificabilidad de una ecuación estructural en un sistema de M ecuaciones simultáneas:

1. Si $K - k > m - 1$ y el rango de matriz **A** es $M - 1$, la ecuación está sobreidentificada.
2. Si $K - k = m - 1$ y el rango de matriz **A** es $M - 1$, la ecuación está exactamente identificada.
3. Si $K - k \geq m - 1$ y el rango de la matriz **A** es menor que $M - 1$, la ecuación está subidentificada.
4. Si $K - k < m - 1$, la ecuación estructural no está identificada. El rango de la matriz **A** en este caso debe ser menor que $M - 1$. (¿Por qué?)

USO DIDACTICO

En adelante, cuando se hable de identificación, debe entenderse identificación exacta o sobreidentificación. No tiene sentido considerar ecuaciones no identificadas o subidentificadas puesto que, no importa qué tan completa sea la información, los parámetros estructurales no pueden ser estimados. Sin embargo, como se muestra en el capítulo 20, es posible identificar los parámetros de las ecuaciones sobreidentificadas al igual que aquellos de las ecuaciones exactamente identificadas.

¿Cuál condición se debe utilizar en la práctica: orden o rango? Para modelos grandes de ecuaciones simultáneas, la aplicación de la condición de rango es una labor muy dispendiosa. Por consiguiente, como afirma Harvey:

> Por fortuna, la condición de orden por lo general es suficiente para asegurar la identificación, y aunque es importante tener conciencia de la condición de rango, la no verificación de su cumplimiento raramente resultará en un desastre.[8]

*19.4 Prueba de simultaneidad[9]

Si no hay ecuaciones simultáneas, o presencia del **problema de la simultaneidad**, MCO producen estimadores consistentes y eficientes. Por otra parte, si hay simultaneidad, los estimadores de MCO no son ni siquiera consistentes. Como se mostrará en el capítulo 20, en presencia de simultaneidad, los métodos de **mínimos cuadrados en dos etapas (MC2E)** y de **variables instrumentales (VI)** producirán estimadores consistentes y eficientes. Extrañamente, si se aplican métodos alternos cuando de hecho no hay simultaneidad, éstos producen estimadores que son consistentes pero no eficientes (es decir, con menor varianza). Todo este análisis sugiere que se debe verificar la presencia del problema de la simultaneidad antes de descartar los MCO en favor de las alternativas.

Como se mostró, el problema de la simultaneidad surge porque algunas de las regresoras son endógenas y, por consiguiente, es probable que estén correlacionadas con el término de perturbación o de error. Así, *en una prueba de simultaneidad, se intenta averiguar si una regresora (una endógena) está correlacionada con el término de error.* Si lo está, existe el problema de simultaneidad, en cuyo caso deben encontrarse alternativas a MCO; si no lo está, se pueden utilizar MCO. Para averiguar cuál es el caso en una situación concreta, se puede utilizar la prueba del error de especificación de Hausman.

Prueba de especificación de Hausman

Una versión de esta prueba, que puede utilizarse para probar la presencia del problema de la simultaneidad, se explica de la siguiente manera.[10]

Para exponer la idea, considere el siguiente modelo de dos ecuaciones:

$$\textit{Función de demanda:} \quad Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + \alpha_3 R_t + u_{1t} \tag{19.4.1}$$

$$\textit{Función de oferta:} \quad Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t} \tag{19.4.2}$$

en donde P = precio
Q = cantidad
I = ingreso
R = riqueza
u = términos de error

Suponga que I y R son exógenas. Por supuesto, P y Q son endógenas.

---

* Opcional.

[8] Andrew Harvey, *The Econometric Analysis of Time Series*, 2a. ed., The MIT Press, Cambridge, Mass., 1990, p. 328.

[9] El siguiente análisis se tomó de Robert S. Pindyck y Daniel L. Rubinfeld, *Econometric Models and Economic Forecasts*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1991, pp. 303-305.

[10] J.A. Hausman, "Specification Tests in Econometrics", *Econometrica*, vol. 46, noviembre de 1976, pp. 1251-1271. Véase también A. Nakamura y M. Nakamura, "On the Relationship among Several Specification Error Tests Presented by Durbin, Wu and Hausman", *Econometrica*, vol. 49, noviembre de 1981, pp. 1583-1588.

USO DIDÁCTICO

Ahora, considere la función de oferta (19.4.2). Si no hay problema de simultaneidad (es decir, P y Q son mutuamente independientes), entonces P_t y u_{2t} no deben estar correlacionadas (¿por qué?). Por otra parte, si hay simultaneidad, P_t y u_{2t} estarán correlacionadas. Para averiguar cuál es el caso, se realiza la siguiente prueba de Hausman:

Primero, de (19.4.1) y (19.4.2) se obtienen las siguientes ecuaciones en forma reducida:

$$P_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + \Pi_2 R_t + v_t \tag{19.4.3}$$

$$Q_t = \Pi_3 + \Pi_4 I_t + \Pi_5 R_t + w_t \tag{19.4.4}$$

en donde v y w son los términos de error en la forma reducida. Si se estima (19.4.3) por MCO, se obtiene

$$\hat{P}_t = \hat{\Pi}_0 + \hat{\Pi}_1 I_t + \hat{\Pi}_2 R_t \tag{19.4.5}$$

Por consiguiente,

$$P_t = \hat{P}_t + \hat{v}_t \tag{19.4.6}$$

en donde $\hat{P}_t$ son estimaciones de P_t y $\hat{v}_t$ son los residuos estimados. Al sustituir la ecuación (19.4.6) en la ecuación (19.4.2), se obtiene

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 \hat{P}_t + \beta_1 \hat{v}_t + u_{2t} \tag{19.4.7}$$

Nota: Los coeficientes de P_t y de v_t son los mismos. La diferencia entre esta ecuación y la ecuación original de oferta es que incluye la variable adicional $\hat{v}_t$, el residuo de la regresión (19.4.3).

Ahora, bajo la hipótesis nula de que no hay simultaneidad, la correlación entre $\hat{v}_t$ y u_{2t} debe ser cero, asintóticamente. Así, si se efectúa la regresión (19.4.7) y se encuentra que el coeficiente de v_t en la ecuación (19.4.7) es estadísticamente cero, puede concluirse que no hay problema de simultaneidad. Por supuesto, esta conclusión se invierte si se encuentra que este coeficiente sí es estadísticamente significativo. De paso, observe que la prueba de simultaneidad de Hausman se conoce también como la *prueba de endogeneidad de Hausman*. En el ejemplo anterior se quiere averiguar si P_t es endógena. Si es así, se tiene el problema de la simultaneidad.

En esencia, la prueba de Hausman comprende los siguientes pasos:

Paso 1. Efectúe la regresión de P_t sobre I_t y R_t para obtener $\hat{v}_t$.

Paso 2. Efectúe la regresión de Q_t sobre $\hat{P}_t$ y $\hat{v}_t$ y realice una prueba t sobre el coeficiente de $\hat{v}_t$. Si éste es significativo, no debe rechazar la hipótesis de simultaneidad; de otra forma, rechácela.[11] Sin embargo, para una estimación eficiente, Pindyck y Rubinfeld sugieren hacer la regresión de Q_t sobre P_t y $\hat{v}_t$.[12]

Existen otras formas de aplicar la prueba de Hausman, que se presentan por medio de un ejercicio.

USO DIDACTICO

EJEMPLO 19.5
Modelo del gasto público de Pindyck-Rubinfeld[13]

Para estudiar el comportamiento del gasto gubernamental de Estados Unidos a nivel estatal y local, los autores desarrollaron el siguiente modelo de ecuaciones simultáneas:

$$\text{EXP} = \beta_1 + \beta_2\text{AID} + \beta_3\text{INC} + \beta_4\text{POP} + u_i \tag{19.4.8}$$

$$\text{AID} = \delta_1 + \delta_2\text{EXP} + \delta_3\text{PS} + v_i \tag{19.4.9}$$

en donde EXP = gasto público de los gobiernos estatal y local
AID = nivel de ayuda mediante subsidio federal
INC = ingreso de los estados
POP = población estatal
PS = población estudiantil de primaria y secundaria
u y v = términos de error

En este modelo, INC, POP y PS se consideran exógenas.

[11] Si hay más de una regresora endógena, deberá utilizarse la prueba F.

[12] Pindyck y Rubinfeld, *op. cit.*, p. 304. *Nota:* La regresora es P_t y *no* $\hat{P}_t$.

[13] Pindyck y Rubinfeld, *op. cit.*, pp. 176-177. La notación ha sido ligeramente alterada.

EJEMPLO 19.5
(*continuación*)

Debido a la posibilidad de que existiera simultaneidad entre EXP y AID, los autores realizaron primero la regresión de AID sobre INC, POP y PS (es decir, la regresión en forma reducida). Sea w_i el término de error en esta regresión y $\hat{w}_i$ el residuo calculado; después los autores efectuaron la regresión de EXP sobre AID, INC, POP y $\hat{w}_i$, para obtener los siguientes resultados:

$$\widehat{\text{EXP}} = -89.41 + 4.50\text{AID} + 0.00013\text{INC} - 0.518\text{POP} - 1.39\hat{w}_i$$
$$t = (-1.04) \quad (5.89) \quad (3.06) \quad (-4.63) \quad (-1.73) \qquad \textbf{(19.4.10)}^{14}$$
$$R^2 = 0.99$$

Al nivel de significancia de 5%, el coeficiente de $\hat{w}_i$ no es estadísticamente significativo y, por consiguiente, a este nivel no hay problema de simultaneidad. Sin embargo, al nivel de significancia de 10%, éste sí es estadísticamente significativo, y aumenta la posibilidad de que exista el problema de simultaneidad.

A propósito, la estimación MCO de la ecuación (19.4.8) es la siguiente:

$$\widehat{\text{EXP}} = -46.81 + 3.24\text{AID} + 0.00019\text{INC} - 0.597\text{POP}$$
$$t = (-0.56) \quad (13.64) \quad (8.12) \quad (-5.71) \qquad \textbf{(19.4.11)}$$
$$R^2 = 0.993$$

Se puede observar una característica interesante de los resultados dados en las ecuaciones (19.4.10) y (19.4.11): cuando la simultaneidad se considera de manera explícita, la variable *AID* es menos significativa, aunque numéricamente tiene una magnitud mayor.

*19.5 Pruebas de exogeneidad

Como ya se dijo, es responsabilidad del investigador especificar cuáles variables son endógenas y cuáles exógenas. Esto dependerá del problema en cuestión y de la información *a priori* de la cual se disponga. Pero, ¿es posible desarrollar una prueba estadística de exogeneidad, al estilo de la prueba de causalidad de Granger?

La prueba de Hausman, analizada en la sección 19.4, puede utilizarse para responder a esta pregunta. Suponga que se tiene un modelo de tres ecuaciones con tres variables endógenas, Y_1, Y_2 y Y_3, y que hay tres variables exógenas, X_1, X_2 y X_3. Suponga además que la primera ecuación del modelo es

$$Y_{1i} = \beta_0 + \beta_2 Y_{2i} + \beta_3 Y_{3i} + \alpha_1 X_{1i} + u_{1i} \qquad \textbf{(19.5.1)}$$

Si Y_2 y Y_3 son verdaderamente endógenas, no se puede estimar la ecuación (19.5.1) por MCO (¿por qué?). Entonces, ¿cómo averiguarlo? Se puede proceder de la siguiente manera: se obtienen las ecuaciones en forma reducida para Y_2 y Y_3 (*Nota:* Las ecuaciones en forma reducida tendrán solamente variables predeterminadas al lado derecho). De estas ecuaciones se obtienen $\hat{Y}_{2i}$ y $\hat{Y}_{3i}$, los valores pronosticados de Y_{2i} y Y_{3i}, respectivamente. Entonces, dentro del planteamiento de la prueba de Hausman, analizada anteriormente, se puede estimar la siguiente ecuación mediante MCO:

$$Y_{1i} = \beta_0 + \beta_2 Y_{2i} + \beta_3 Y_{3i} + \alpha_1 X_{1i} + \lambda_2 \hat{Y}_{2i} + \lambda_3 \hat{Y}_{3i} + u_{1i} \qquad \textbf{(19.5.2)}$$

Al emplear la prueba F, se demuestra la hipótesis de que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Si esta hipótesis es rechazada, Y_2 y Y_3 pueden considerarse endógenas, pero si no lo es, pueden ser tratadas como exógenas. Para un ejemplo concreto véase el ejercicio 19.16.

* Opcional.

[14] Al igual que en la nota 12 de pie de página, los autores utilizan a AID como regresora en lugar de AID.

USO DIDÁCTICO

Resumen y conclusiones

1. El problema de la identificación es anterior al problema de la estimación.
2. Por problema de la identificación se entiende la posibilidad de obtener estimaciones numéricas únicas de los coeficientes estructurales a partir de los coeficientes en forma reducida.
3. Si esto puede hacerse, una ecuación que forma parte de un sistema de ecuaciones simultáneas está identificada. Si esto no puede hacerse, la ecuación estará no identificada o subidentificada.
4. Una ecuación identificada puede estarlo en forma exacta o estar sobreidentificada. En el primer caso pueden obtenerse valores únicos de los coeficientes estructurales; en el segundo, puede haber más de un valor para uno o más de los parámetros estructurales.
5. El problema de la identificación surge porque el mismo conjunto de información puede ser compatible con diferentes conjuntos de coeficientes estructurales, es decir, diferentes modelos. Así, en la regresión del precio sobre la cantidad solamente, es difícil decir si se está estimando la función de oferta o la de demanda, porque el precio y la cantidad forman parte de ambas ecuaciones.
6. Para establecer si una ecuación estructural está identificada, se puede aplicar la técnica de las **ecuaciones en forma reducida**, que expresan una variable endógena únicamente como función de variables predeterminadas.
7. Sin embargo, este laborioso procedimiento se puede evitar recurriendo a la **condición de orden** o a la **condición de rango** para la identificación. Aunque la condición de orden es fácil de aplicar, ésta proporciona solamente una condición necesaria para la identificación. Por otra parte, la condición de rango es una condición necesaria y suficiente para la identificación. Si la condición de rango se satisface, la de orden se satisface también, aunque lo contrario no es cierto. Pero, en la práctica, la condición de orden es generalmente adecuada para asegurar la identificabilidad.
8. En presencia de simultaneidad, por lo general, MCO no son aplicables, como se mostró en el capítulo 18. No obstante, si se desea utilizarlos es imperativo realizar explícitamente la prueba de simultaneidad. La **prueba de especificación de Hausman** puede emplearse para este propósito.
9. Aunque, en la práctica, la decisión de si una variable es endógena o exógena es un asunto de juicio, es posible utilizar la prueba de especificación de Hausman para determinar si una variable o un grupo de variables son exógenas o endógenas.
10. Aunque son de la misma familia, los conceptos de causalidad y de exogeneidad son diferentes y uno puede no necesariamente implicar el otro. En la práctica, es mejor mantener esos conceptos separados (véase la sección 17.14).

USO DIDÁCTICO

EJERCICIOS

Preguntas

19.1. Demuestre que las dos definiciones de la condición de orden para la identificación (véase la sección 19.3) son equivalentes.

19.2. Deduzca los coeficientes estructurales de los coeficientes en forma reducida dados en las ecuaciones (19.2.25) y (19.2.27).

19.3. Obtenga la forma reducida de los siguientes modelos y determine en cada caso si las ecuaciones estructurales no están identificadas, están identificadas exactamente o están sobreidentificadas:
a) Capítulo 18, ejemplo 18.2.
b) Capítulo 18, ejemplo 18.3.
c) Capítulo 18, ejemplo 18.6.

19.4. Verifique la identificabilidad de los modelos del ejercicio 19.3, aplicando las condiciones de orden y de rango para la identificación.

19.5. En el modelo (19.2.22) del texto se demostró que la ecuación de oferta estaba sobreidentificada. ¿Cuáles restricciones, de existir, sobre los parámetros estructurales harán que esta ecuación esté exactamente identificada? Justifique las restricciones que se impongan.

19.6. Del modelo

$$Y_{1t} = \beta_{10} + \beta_{12}Y_{2t} + \gamma_{11}X_{1t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21}Y_{1t} + \gamma_{22}X_{2t} + u_{2t}$$

se obtienen las siguientes ecuaciones en forma reducida:

$$Y_{1t} = \Pi_{10} + \Pi_{11}X_{1t} + \Pi_{12}X_{2t} + w_t$$
$$Y_{2t} = \Pi_{20} + \Pi_{21}X_{1t} + \Pi_{22}X_{2t} + v_t$$

a) ¿Están identificadas las ecuaciones estructurales?

b) ¿Qué sucede con la identificación si se sabe *a priori* que $\gamma_{11} = 0$?

19.7. Remítase al ejercicio 19.6. Las ecuaciones estimadas en forma reducida son las siguientes:

$$Y_{1t} = 4 + 3X_{1t} + 8X_{2t}$$
$$Y_{2t} = 2 + 6X_{1t} + 10X_{2t}$$

a) Obtenga los valores de los parámetros estructurales.

b) ¿Cómo se probaría la hipótesis nula de que $\gamma_{11} = 0$?

19.8. El modelo

$$Y_{1t} = \beta_{10} + \beta_{12}Y_{2t} + \gamma_{11}X_{1t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21}Y_{1t} + u_{2t}$$

genera las siguientes ecuaciones en forma reducida:

$$Y_{1t} = 4 + 8X_{1t}$$
$$Y_{2t} = 2 + 12X_{1t}$$

a) ¿Cuáles coeficientes estructurales, de existir, pueden ser estimados a partir de los coeficientes en forma reducida? Fundamente el argumento.

b) ¿Cómo cambia la respuesta de *a*) si se sabe *a priori* que 1) $\beta_{12} = 0$ y 2) $\beta_{10} = 0$?

19.9. Determine si las ecuaciones estructurales del modelo dado en el ejercicio 18.8 están identificadas.

19.10. Remítase al ejercicio 18.7 y determine cuáles ecuaciones estructurales pueden ser identificadas.

19.11. La tabla 19.3 es un modelo de cinco ecuaciones con cinco variables endógenas Y y cuatro variables exógenas X:

TABLA 19.3

	Coeficientes de las variables								
Núm. de ecuación	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1	β_{12}	0	β_{14}	0	γ_{11}	0	0	γ_{14}
2	0	1	β_{23}	β_{24}	0	0	γ_{22}	γ_{23}	0
3	β_{31}	0	1	β_{34}	β_{35}	0	0	γ_{33}	γ_{34}
4	0	β_{42}	0	1	0	γ_{41}	0	γ_{43}	0
5	β_{51}	0	0	β_{54}	1	0	γ_{52}	γ_{53}	0

Determine la identificabilidad de cada ecuación con la ayuda de las condiciones de orden y de rango para la identificación.

19.12. Considere el siguiente modelo keynesiano ampliado de determinación del ingreso:

Función de consumo: $C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t - \beta_3 T_t + u_{1t}$

Función de inversión: $I_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + u_{2t}$

Función de impuestos: $T_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + u_{3t}$

Identidad del ingreso: $Y_t = C_t + I_t + G_t$

USO DIDÁCTICO

en donde C = gasto de consumo
Y = ingreso
I = inversión
T = impuestos
G = gasto gubernamental
u = términos de perturbación

En el modelo, las variables endógenas son C, I, T y Y, y las variables predeterminadas son G y Y_{t-1}.

Al aplicar la condición de orden, verifique la identificabilidad de cada una de las ecuaciones en el sistema y del sistema como un todo. ¿Qué sucedería si r_t, la tasa de interés, que se ha supuesto exógena, apareciera al lado derecho de la función de inversión?

19.13. Remítase a la información dada en la tabla 18.1 del capítulo 18. Utilizando esta información, estime las regresiones en forma reducida (19.1.2) y (19.1.4). ¿Se pueden estimar β_0 y β_1? Muestre los cálculos. ¿Está el modelo identificado? ¿Por qué sí o por qué no?

19.14. Suponga que se propone una definición adicional a la condición de orden para la identificación:

$$K \geq m + k - 1$$

que establece que el número de variables predeterminadas en el sistema no puede ser menor que el número de coeficientes desconocidos en la ecuación que va a ser identificada. Muestre que esta definición es equivalente a las otras dos definiciones de la condición de orden dadas en el texto.

19.15. A continuación se presenta una versión simplificada del modelo de Suits del mercado de sandías.*

Ecuación de demanda: $P_t = \alpha_0 + \alpha_1(Q_t/N_t) + \alpha_2(Y_t/N_t) + \alpha_3 F_t + u_{1t}$

Función de oferta de la cosecha: $Q_t = \beta_0 + \beta_1(P_t/W_t) + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 C_{t-1} + \beta_4 T_{t-1} + u_{2t}$

en donde P = precio
(Q/N) = cantidad demandada *per cápita*
(Y/N) = ingreso *per cápita*
F = costos de transporte
(P/W) = precio relativo a la tasa salarial agrícola
C = precio del algodón
T = precio de otros vegetales
N = población

P y Q son las variables endógenas.

a) Obtenga la forma reducida.

b) Determine si la función de demanda, de oferta, o las dos están identificadas.

Ejercicios empíricos

19.16. Considere el siguiente modelo de demanda y oferta de dinero:

Demanda de dinero: $M_t^d = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 R_t + \beta_3 P_t + u_{1t}$

Oferta de dinero: $M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_{2t}$

* D.B. Suits, "An Econometric Model of the Watermelon Market", *Journal of Farm Economics*, vol. 37, 1955, pp. 237-251.

USO DIDÁCTICO

TABLA 19.4
Dinero, PIB, tasa de interés e índice de precios al consumidor en Estados Unidos, 1970-2006

Fuente: *Economic Report of the President*, 2007, tablas B-2, B-60, B-69 y B-73.

Observación	M_2	PIB	TASABT	IPC
1970	626.5	3 771.9	6.458	38.8
1971	710.3	3 898.6	4.348	40.5
1972	802.3	4 105.0	4.071	41.8
1973	855.5	4 341.5	7.041	44.4
1974	902.1	4 319.6	7.886	49.3
1975	1 016.2	4 311.2	5.838	53.8
1976	1 152.0	4 540.9	4.989	56.9
1977	1 270.3	4 750.5	5.265	60.6
1978	1 366.0	5 015.0	7.221	65.2
1979	1 473.7	5 173.4	10.041	72.6
1980	1 599.8	5 161.7	11.506	82.4
1981	1 755.5	5 291.7	14.029	90.9
1982	1 910.1	5 189.3	10.686	96.5
1983	2 126.4	5 423.8	8.63	99.6
1984	2 309.8	5 813.6	9.58	103.9
1985	2 495.5	6 053.7	7.48	107.6
1986	2 732.2	6 263.6	5.98	109.6
1987	2 831.3	6 475.1	5.82	113.6
1988	2 994.3	6 742.7	6.69	118.3
1989	3 158.3	6 981.4	8.12	124.0
1990	3 277.7	7 112.5	7.51	130.7
1991	3 378.3	7 100.5	5.42	136.2
1992	3 431.8	7 336.6	3.45	140.3
1993	3 482.5	7 532.7	3.02	144.5
1994	3 498.5	7 835.5	4.29	148.2
1995	3 641.7	8 031.7	5.51	152.4
1996	3 820.5	8 328.9	5.02	156.9
1997	4 035.0	8 703.5	5.07	160.5
1998	4 381.8	9 066.9	4.81	163.0
1999	4 639.2	9 470.3	4.66	166.6
2000	4 921.7	9 817.0	5.85	172.2
2001	5 433.5	9 890.7	3.45	177.1
2002	5 779.2	10 048.8	1.62	179.9
2003	6 071.2	10 301.0	1.02	184.0
2004	6 421.6	10 675.8	1.38	188.9
2005	6 691.7	11 003.4	3.16	195.3
2006	7 035.5	11 319.4	4.73	201.6

Notas: M_2 = oferta de dinero M_2 (miles de millones de dólares).
PIB = producto interno bruto (miles de millones de dólares).
TASABT = tasa de interés de los bonos del Tesoro a tres meses, %.
IPC = índice de precios al consumidor (1982-1984 = 100).

USO DIDÁCTICO

en donde M = dinero
Y = ingreso
R = tasa de interés
P = precio
u = términos de error

Suponga que R y P son exógenas y que M y Y son endógenas. En la tabla 19.4 se presenta información sobre M (definición M_2), Y (*PIB*), R (tasa de los bonos del Tesoro a tres meses) y P (índice de precios al consumidor), para Estados Unidos durante 1970-2006.

a) ¿Está identificada la función de demanda?

b) ¿Está identificada la función de oferta?

c) Obtenga las expresiones para las ecuaciones en forma reducida para M y para Y.

d) Aplique la prueba de la simultaneidad a la función de oferta.

e) ¿Cómo puede establecerse si Y es realmente endógena en la función de oferta de dinero?

19.17. La prueba de Hausman analizada en el texto también se puede llevar a cabo de la siguiente manera. Considere la ecuación (19.4.7):

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_1 v_t + u_{2t}$$

a) Puesto que P_t y v_t tienen los mismos coeficientes, ¿cómo se probaría que en una aplicación determinada esto es así efectivamente? ¿Qué implicaciones tiene esto?

b) Puesto que P_t no está correlacionada con u_{2t} por definición (¿por qué?), una manera de averiguar si P_t es exógena consiste en ver si v_t está correlacionada con u_{2t}. ¿Cómo se puede probar esto? ¿Qué prueba se emplea? (*Pista:* Sustituya P_t de la ecuación [19.4.6] en la ecuación [19.4.7].)

USO DIDÁCTICO